# 海淀高三年级第一学期期中考试（理）试卷深入解析

精华学校数学组　樊兆春 王威

## 【试题特点】

这次海淀区的期中考试范围是：集合、函数、三角函数、平面向量、解三角形、数列。

本次试题符合 2013 年考试说明的要求，特别是反映了北京市 2014 年高考的改革方向。试题以下几个特点特别值得教师和学生关注。

1.试卷以中等难度的题为主，对数学基础知识的考察，既全面又突出重点，并注重了学科的内在联系和知识的综合。命题的立意以能力立意为主，重点考察了学生数学素养和思维能力、分析问题及解决综合问题的能力。

2.与往年相比试题的新变化：

（1）考察基础知识、基本方法的题目更趋于直白，少了较复杂的运算和陷阱，不需学生题海战术就能得分。且重点知识重点考，考察通性通法，避免繁杂的运算及技巧；

（2）注重对重要数学概念的考察。要求学生对所学内容要真正理解，掌握概念的内涵和外延，从而运用概念解决问题。

（3）注重对重要数学思想、思维方法、逻辑推理方法及分析问题和解决综合问题的考察。

通过以上分析，高三的数学复习，题海战术与高考的要求是相违背的，是一种低效的复习方式。应在对基础知识和概念的理解上多下工夫，思考和总结与做题并重，特别是要注重对重要数学思想和思维方法的训练和体会。

## 【试卷分析】

### 一、选择题部分

1.已知集合 $A=\{-1,1,2\}$，$B=\{x\,|\,x+1\geq 0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,1,2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{-1,2\}$　　D. $\{2\}$

【分析】本题考查集合的表示与运算，难度不大，掌握表示方法、了解运算概念即可解决。集合的核心考察主要就集中在集合的表示和运算上，常与基本的解不等式结合考察。

【解】A.

$A=\{-1,1,2\}$，$B=\{x\mid x\geq -1\}$，两集公有的元素只有$-1,1,2$，故选 A.

2.下列函数中，值域为$(0,+\infty)$的函数是（　　）

A. $f(x)=\sqrt{x}$　　B. $f(x)=\ln x$　　C. $f(x)=2^x$　　D. $f(x)=\tan x$

【分析】本题考查基本函数的值域，属于基础内容，难度不大。要求考生对指数函数、幂函数、对数函数和三角函数的定义域和值域有基本的认识。这些基本函数的三要素和各个函数的通性要在理解的基础上熟记。

【解】C.

对于 A 选项，考察基本的幂函数，$f(x)=\sqrt{x}$的定义域是$[0,+\infty)$，值域也是$[0,+\infty)$；对于 B 选项，考察对数函数，$f(x)=\ln x$的定义域是$(0,+\infty)$，值域是$R$；对于 C.选项，考察指数函数，$f(x)=2^x$的定义域是$R$，值域是$(0,+\infty)$；对于 D 选项考察正切函数，其定义域为$(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$，其中$k\in Z$，值域是$R$。故选 C.

3.在$\Delta ABC$中，若$\tan A=-2$，则$\cos A=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【分析】本题考察同角三角函数之间的关系（$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$）及三角函数符号与角度大小的关系，难度适中。本题处需要熟悉同角三角函数关系之外还涉及到三角函数求解问题中常见的角的范围限制，依据角的限制条件确定三角函数的符号。

【解】D.

由于$A$为$\Delta ABC$的内角，且$\tan A<0$，可知$A\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则$\cos A<0$。根据同角三角函数公式可知，$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=-2$，即$\sin A=-2\cos A$，可得$\cos^2 A+\sin^2 A=5\cos^2 A=1$，那么解得$\cos A=-\frac{\sqrt{5}}{5}$。故选 B

4.在平面直角坐标系$xOy$中，已知点$O(0,0)$，$A(0,1)$，$B(1,-2)$，$C(m,0)$. 若$\overrightarrow{OB}\,//\,\overrightarrow{AC}$，则实数$m$的值为（　　）

A. $-2$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $2$

【分析】本题考察向量共线的关系判定（$\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}//\vec{b}$）以及向量的坐标表示，难度适中。向量位置关系的判定是向量常考考点之一，除向量平行的判定外向量的垂直判定和夹角的求解也是向量的核心考点之一，需要熟练掌握和运用。

【解】C.

解法一：根据已知可解的$\overrightarrow{OB}=(1-0,-2-0)=(1,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(m-0,0-1)=(m,-1)$，根据向量平行的判定可知，$\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{AC}$，即$\frac{1}{m}=\frac{-2}{-1}$，可解的$m=\frac{1}{2}$。故选 C.

解法二：将对应的点在坐标系中表明，通过集合关系可以直接得出$m=\frac{1}{2}$。故选 C.

5.若$a\in R$，则“$a^2>a$”是“$a>1$”的（　　）

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

【分析】本题考察简易逻辑部分充分必要性的判断。这部分内容属于高考中点高频考点之一，考试方式特殊。主要依托充分条件和必要条件的定义来考察不同知识点的细节。对于充分条件和必要条件问题强调：必要条件对应集合包含充分条件对应集合。

【解】B.

对于$a^2>a$可以解得$a<0$或$a>1$，可知$a>1\Rightarrow a^2>a$，根据充分条件必要条件的定义，可知$a^2>a$为$a>1$的必要而不充分条件。故选 B.

6.已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2^n(3n-13)$，则该数列的前$n$项和$S_n$取最小值时，$n$的值为（　　）

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

【分析】本题考察数列前$n$项和与数列$\{a_n\}$之间的关系，需要考生注意到数列$\{a_n\}$中项的正负对于前$n$和$S_n$的影响，难度适中。本题是对数列概念的深入考察，充分体现了对概念理解和思维逻辑的考察。

【解】B.

通过题目可知，对于数列$\{S_n\}$，当$n\geq 2$时，$S_n-S_{n-1}=a_n=2^n(3n-13)$。可知，当$n\leq 4$时，$S_n-S_{n-1}=a_n=2^n(3n-13)<0$，即有$S_1>S_2>S_3>S_4$；当$n\geq 5$时，同理可以得到$S_4>S_5>S_6>S_7>....$，可知$S_4$为最小值。故选 B.

7.已知$a>0$，函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{2}x, x\in\left[-1,0\right)\\ ax^2+ax+1, x\in\left[1,+\infty\right)\end{cases}$，若$f(t-\frac{1}{3})>-\frac{1}{2}$，则实数$t$的取值范围为（　　）

A.$[-\frac{2}{3},0)$　　B. $[-1,0)$　　C. $[2,3)$　　D.$(0,+\infty)$

【分析】本题考察了分段函数的函数单调性，需要考生具有一定的数学能力，了解处理函数问题的基本原则，本题选出答案并不难，但是具体说明原因难度较高。由于题目中有参数$a$的存在，导致了很多同学没有很好的把握好这道题目。对于非简单基本函数，一定要从函数通性入手研究相应问题，本题从通性入手可以很顺利的完成。

【解】D.

解法一：特殊值极端原理，由于$a>0$，我们可知当$t$趋于正无穷时，$t-\frac{1}{3}$也趋于正无穷，那么此时$f(t-\frac{1}{3})$的值也会趋于正无穷，必然满足$f(t-\frac{1}{3})>-\frac{1}{2}$，说明$t$的取值可以趋于正无穷，根据选项特征，确定选择D选项。

解法二：对于函数$f(x)$，当$x\in\left[-1,0\right)$时，$f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$为单调递增函数；当$x\in\left[0,+\infty\right)$时，$f(x)=ax^2+ax+1$，也为单调递增函数，又因为$\sin\frac{\pi}{2}\cdot 0=0<a\cdot 0^2+a\cdot 0+1=1$，可知$f(x)$在整个定义域内为单调函数。又$f(-\frac{1}{3})=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\sin-\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$，那么得到不等式$f(t-\frac{1}{3})>-\frac{1}{2}=f(-\frac{1}{3})$，即$t-\frac{1}{3}>-\frac{1}{3}$，同时$t-\frac{1}{3}\in[-1,+\infty)$，可以解得$t>0$。故选D.

8.已知函数$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$，在下列结论中：

①$\pi$是$f(x)$的一个周期；

②$f(x)$的图像关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称；

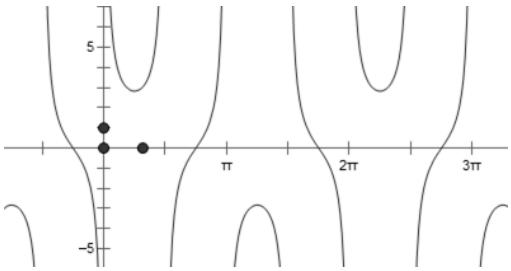
③$f(x)$在$(-\frac{\pi}{2},0)$上单调递减.

正确结论的个数为（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

【分析】本题综合考察了三角函数的性质和函数通性的判断，综合性和难度都比较高。考察内容不但涉及到了函数通性中周期性（$f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow f(x)$为周期函数）、对称性

（$f(2a-x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)$关于$x=a$对称）和单调性（$f'(x)$的正负与原函数增减一致）的判断方法同时还考察了三角函数自身的性质。本题很好的考察了函数的概念和函数的研究方法，也是考生今后复习的重点。本题函数图像如下图所示：




【解】C.

首先对函数进行化简，可得$f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}$。对于结论①，利用周期性的判断方法，可得$f(x+\pi)=\dfrac{1}{\cos(x+\pi)}+\dfrac{1}{\sin(x+\pi)}=-\left(\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}\right)=-f\left(x\right)$，周期为$2\pi$，故本结论不正确；对于结论②，利用函数对称性判断方法，可得$f(2\cdot\dfrac{\pi}{4}-x)=\dfrac{1}{\cos(2\cdot\dfrac{\pi}{4}-x)}+\dfrac{1}{\sin(2\cdot\dfrac{\pi}{4}-x)}=\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}+\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}=\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$

$=f\left(x\right)$，可知$x=\dfrac{\pi}{4}$为$f(x)$对称轴，故本结论正确；对于结论③，对原函数求导可以得到$f'(x)=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}+\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$，当$x\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$时，$-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}<0$且$\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}<0$，则$f'(x)<0$，原函数单调递减，故本结论成立。综上可知选 C.

## 二、填空题部分

9. $\int_0^1\left(2x+1\right)dx=$_____.

【分析】本题考察了定积分的定义和运算，而且还是直线的定积分考察，难度不大。定积分的考察主要是基于对定积分概念和方法的理解，难度普遍不大，关键是要掌握计算的方法。对于直线的定积分问题可以直接通过集合意义求解直线下面积即可。

【解】2

解法一：根据定积分的计算法则可知$\int_0^1\left(2x+1\right)dx=x^2+x\big|_0^1=2-0=2$。故填2。

解法二：根据定积分的概念，可以知道$\int_0^1\left(2x+1\right)dx$表示四条直线：$y=2x+1$，$y=0$，$x=0$，$x=1$围成的梯形面积，根据梯形面积公式可知$\int_0^1\left(2x+1\right)dx=\dfrac{1}{2}\times1\times\left(1+3\right)=2$。

故填2。

10.已知数列$\{a_n\}$为等差数列，若$a_1+a_3=5$，$a_2+a_4=10$，则通项公式$a_n=$_____.

【分析】本题考察等差数列的概念和基本性质，难度不大。等差数列和等比数列的问题多数可以通过“回归基本量”（$a_1$，$d$或$a_1$，$q$）的方法予以解决，如果通过等差（比）数列处理通常可以简化计算过程。

【解】$\frac{5}{2}(n-1)$

解法一：$a_1+a_3=a_1+a_1+2d=2a_1+2d=5$，$a_2+a_4=a_1+d+a_1+3d=2a_1+4d=10$，

建立方程组$\begin{cases}a_1+d=\frac{5}{2}\\a_1+2d=5\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=0\\d=\frac{5}{2}\end{cases}$，故$a_n=\frac{5}{2}(n-1)$。

解法二：根据等差中项性质，可知$a_1+a_3=2a_2=5$，$a_2+a_4=2a_3=10$，可得$a_2=\frac{5}{2}$，$a_3=5$，可知$d=\frac{5}{2}$，可以得到$a_n=a_2+d(n-2)=\frac{5}{2}(n-1)$。

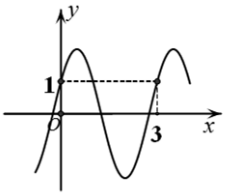
11.已知$a=\log_2 5$，$2^b=3$，$c=\log_3 2$，则$a,b,c$的大小关系为_____.

【分析】本题考察对数的概念和对数函数的单调性，此类问题属于相对常规的问题，需要注意底数大小对于对数函数单调性的影响以及对数函数的特殊值的位置。

【解】$a>b>c$

由于$2^b=3$，可知$b=\log_2 3$，对于函数$f(x)=\log_2 x$为单调递增函数，那么$\log_2 5>\log_2 3$，即$a>b$；同样函数$g(x)=\log_3 x$也为单调递增函数，那么可知$\log_3 2<\log_3 3=1<\log_2 3$，可知$b>c$。综上可知$a>b>c$。

12.函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的图像如图所示，则$\omega=$_____，$\varphi=$_____.




【分析】本题考察三角函数的图像变化，属于常规问题的考察，掌握基本规律不会有太大难度。本题需要了解到三角函数的周期与$\omega$的关系，同时要利用题目中的已知点对$\varphi$进行推理。同时，对于$\varphi$的求解也是有规律可循的，对于$\sin(\omega x+\varphi)$的图像，$\varphi$的值可以通过原函数零点平移后的横坐标$x_0$求得，其关系为$\varphi=-\omega x_0$本题给出的坐标可能相对于带有$\pi$的

坐标更陌生，希望考生可以灵活处理。

【解】$\frac{2}{3}\pi,\frac{\pi}{6}$

根据图像可知 $f(x)$ 的周期为 $3$，那么 $\frac{2\pi}{\omega}=3$，可解得 $\omega=\frac{2}{3}\pi$；观察图像，其给出了一个特殊点 $(0,1)$，则 $f(0)=2\sin(\omega\cdot 0+\varphi)=2\sin\varphi=1$，可得 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$。或者直接使用结论 $\varphi=-\omega x_0$ 求解 $\varphi$ 的值，通过图像可知，$x_0=-\frac{1}{4}$，那么可得 $\varphi=-\omega x_0=\frac{2}{3}\pi\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{6}$。故填 $\frac{2}{3}\pi,\frac{\pi}{6}$.

13.已知 $\Delta ABC$ 是正三角形，设向量 $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\lambda\overrightarrow{AB}$. 若向量 $\vec{a}$ 与向量 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角大于 $90°$，则实数 $\lambda$ 的取值范围是_____.

【分析】本题考察向量基本的线性表示和向量的数量积。本题较文科题目的变化在于选择了一组非垂直的单位向量作为基底。此类题目可以直接通过数量积进行 $\Delta ABC$ 运算，或者使用向量的坐标表示进行处理。

【解】$\lambda>2$

解法一：若向量 $\vec{a}$ 与向量 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角大于 $90°$，可知 $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AC}<0$，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AC}-\lambda\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}$ $=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\lambda\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$。由于 $AB$, $A$ 为正三角形 $\Delta ABC$ 的边，则 $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=1$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$，可知 $1-\frac{1}{2}\lambda<0$，解得 $\lambda<2$。

解法二：以点 $A$ 作为坐标原点，$AC$ 所在直线为 $x$ 轴，以垂足为 $A$ 且垂直于 $AC$ 的直线为 $y$ 轴，那么可得点的坐标如下：$A(0,0),B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),C(1,0)$。那么 $\overrightarrow{AB}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AC}=(1,0)$，那么 $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\lambda\overrightarrow{AB}=(1-\frac{1}{2}\lambda,-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda)$，那么 $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AC}=1-\frac{1}{2}\lambda<0$，解得 $\lambda<2$.

14.定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足：

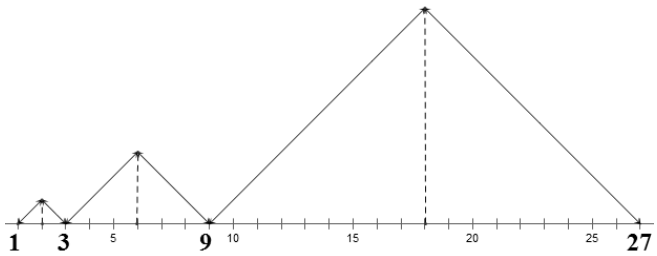
①当 $x\in[0,3)$ 时，$f(x)=1-|x-2|$；② $f(3x)=3f(x)$.

设关于 $x$ 的函数 $F(x)=f(x)-a$ 的零点从小到大依次为 $x_1,x_2...x_n...$

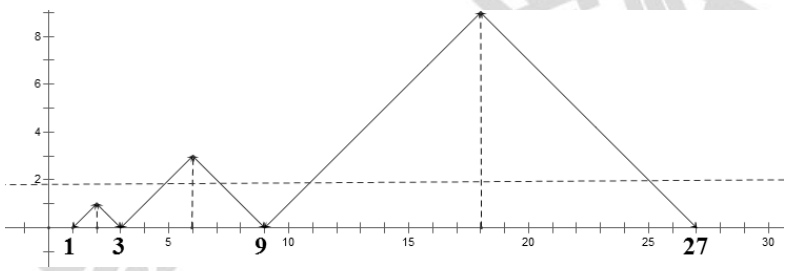
（ⅰ）若 $a=1$，则 $x_1+x_2+x_3=$_____；

（ⅱ）若 $a\in(1,3)$，则 $x_1+x_2+...+x_{2n-1}+x_{2n}=$_____.

【分析】本题主要考察函数方程意义、赋值法数列和函数综合，同时渗透了数形结合的数学思想，综合考察学生对于函数和数列的理解，难度较大。本题对于考生的数学能力和逻辑思维的要求较高，也是北京地区命题的趋势，重视基本概念和数学方法结论的推理过程。题目要从 $x\in[0,3)$ 的解析式入手，通过 $f(3x)=3f(x)$ 将整个函数的图像推理出来，对题目进行求解。其函数图像如下图所示：




根据上图可知函数在每段区间内图像相似，而且具有对称轴，对于第二问，其图像如下图所示：




可以发现，每一组跟都关于其区间内的对称轴对称，依次可以相对直观的解决题目。

【解】（ⅰ）14；（ⅱ）$6\left(3^n-1\right)$

首先对于函数进行整体分析，由于 $f(3x)=3f(x)$，可以推得 $f(3^n x)=3^n f(x)$。

（ⅰ）解法一：由图像可知 $x_1,x_2,x_3$ 应该在 $[1,9)$ 内取到，而且当 $x\in[1,3)$ 时，$f(x)-1=0$ 的根为 $x_1=2$，当 $x\in[3,9)$，可知 $f(x)=3f(\frac{x}{3})$，可知 $3f(\frac{x}{3})=1$，根为 $x_2=4,x_3=8$，所以 $x_1+x_2+x_3=14$。故填14.

解法二：根据图像可知，$x\in[1,3)$ 时，$f(x)-1=0$ 根恰好在对称轴 $x=2$ 处，可知 $x_1=2$；当 $x\in[3,9)$ 时，函数关于 $x=6$ 对称，那么 $f(x)-1=0$ 的两根 $x_2,x_3$ 关于 $x=6$ 对称，可得 $x_2+x_3=2\times6=12$，那么 $x_1+x_2+x_3=14$。故填14.

（ii）由图像可知，当 $a\in(1,3)$ 时，$[1,3)$ 内不存在根，同样可知，第一组根 $x_1,x_2\in[3,9)$，

那么根据（i）所提的对称性，可知 $\frac{x_1+x_2}{2}=6$，同理，可知当 $x_{2n-1},x_{2n}\in[3^n,3^{n+1})$ 时，

其对称轴为 $2\cdot3^n$，那么 $\frac{x_{2n-1}+x_{2n}}{2}=2\cdot3^n$。那么可以得到：

$$x_1+x_2+...+x_{2n-1}+x_{2n}=2\left(6+18+...+2\cdot3^n\right)=6\left(3^n-1\right)$$

## 三、解答题部分

15.在 $\Delta ABC$ 中，$A=60°$，$3b=2c$，$S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求 $b$ 的值；

（Ⅱ）求 $\sin B$ 的值.

【分析】本题考察解三角形的基本内容，对正弦定理、余弦定理和面积公式均有考察，难度不大，属于高考常规题目。这类习题考生需要正确使用已学公式，以保证题目快速准确的得出结果，若要做到这一点，需要对正余弦定理的公式形式十分熟悉。本题第（Ⅰ）问中，使用面积公式 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$ 可以的到相应的解；第（Ⅱ）问中，已知两边 $b,c$ 及其夹角 $A$，符合余弦定理的基本形式，使用余弦定理可解得边 $a$，利用正弦定理可得出结果。

【解】（Ⅰ）由 $A=60^\circ$ 和 $S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 可得 $\frac{1}{2}bc\sin60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，（2 分）

所以 $bc=6$，（3 分）

又 $3b=2c$,

所以 $b=2,c=3$.（5 分）

（Ⅱ）因为 $b=2,c=3,A=60^\circ$，

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 可得（7 分）

$a^2=2^2+3^2-6=7$，即 $a=\sqrt{7}$.（9 分）

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 可得（11 分）

$\frac{\sqrt{7}}{\sin60^\circ}=\frac{2}{\sin B}$，（12 分）

所以 $\sin B=\frac{\sqrt{21}}{7}$.（13 分）

16.已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos 4x-2\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期;

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$ 上的取值范围.

【分析】本题考察三角函数的恒等变化以及三角函数图像性质，以及在具体区间上求解函数的值域问题。这类问题是北京近 5 年来高考的必考题目，因为涉及知识点和方法比较全面，所以受到命题人的亲睐。对于三角函数的恒等变化中，需要熟练掌握倍角半角公式（也成为升幂降幂公式，即：$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$，$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$，$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$）和辅助角公式（$a\cos\alpha+b\sin\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\frac{a}{b}$），这两组公式的考察较多。对于基础的三角函数图像性质（如对称轴，周期性，对称性等），另外，在具体区间上求解函数的值域的问题希望可以对图像十分熟悉，了解对称轴位置，以判断取最值的位置。

【解】（Ⅰ） $f(x)=\sqrt{3}\cos 4x-\cos(4x+\frac{\pi}{2})$ (2 分)

$=\sqrt{3}\cos 4x+\sin 4x$ (4 分)

$=2\sin(4x+\frac{\pi}{3})$ ( 6 分)

$f(x)$ 最小正周期为 $T=\frac{\pi}{2}$， (8 分)

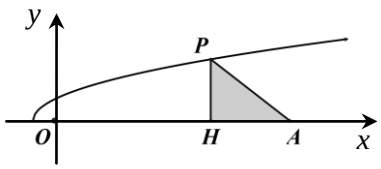
（Ⅱ）因为 $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{4}$，所以 $-\frac{\pi}{3}\le 4x+\frac{\pi}{3}\le\frac{4\pi}{3}$ (10 分)

所以 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\sin(4x+\frac{\pi}{3})\le 1$ (12 分)

所以 $-\sqrt{3}\le 2\sin(4x+\frac{\pi}{3})\le 2$， (13 分)

所以 $f(x)$ 取值范围为 $[-\sqrt{3},2]$. (14 分)

17.如图，已知点 $A(11,0)$，直线 $x=t$（$-1<t<11$）与函数 $y=\sqrt{x+1}$ 的图像交于点 $P$，与 $x$ 轴交于点 $H$，记 $\Delta APH$ 的面积为 $f(t)$.




（Ⅰ）求函数 $f(t)$ 的解析式;

（Ⅱ）求函数 $f(t)$ 的最大值.

精华学校

【分析】本题考察函数的实际应用，主要考查学生构建函数模型的能力，以及利用导数求解函数最值的能力，难度适中。这类型问题是海淀高三期中考历年主要考察的题型之一，也体现了数学的应用能力考查，在新的高考政策出台后，这类型的问题会受到相应的重视。在后期在高考数学中这一题型考查形式会发生相应变化，多出现在高考数学中的压轴小题部分。特别强调，这类型构造函数模型的问题要对函数定义域有明确的把握，不能只重视解析式的求解而忽略函数的定义域。

【解】（Ⅰ）由已知 $AH=11-t, PH=\sqrt{t+1}$ （1 分）

所以 $\Delta APH$ 的面积为 $f(t)=\frac{1}{2}(11-t)\sqrt{t+1}$，其中 $-1<t<11$. （4 分）

（Ⅱ）解法一： $f'(t)=-\frac{1}{2}\sqrt{t+1}+\frac{1}{2}\times(11-t)\times\frac{1}{2\sqrt{t+1}}$

$=\frac{3(3-t)}{4\sqrt{t+1}}$ 7 分

由 $f'(t)=0$ 得 $t=3$， （8 分）

函数 $f(t)$ 与 $f'(t)$ 在定义域上的情况下表：

| $t$ | $(-1,3)$ | 3 | $(3,11)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | + | 0 | − |
| $f(t)$ | ↗ | 极大值 | ↘ |

（12 分）

所以当 $t=3$ 时，函数 $f(t)$ 取得最大值 8. （13 分）

解法二：由 $f(t)=\frac{1}{2}(11-t)\sqrt{t+1}=\frac{1}{2}\sqrt{(11-t)^2(t+1)}, -1<t<11$

设 $g(t)=(11-t)^2(t+1), -1<t<11$， （6 分）

则 $g'(t)=-2(11-t)(t+1)+(11-t)^2=(t-11)(t-11+2t+2)=3(t-3)(t-11)$. （7 分）

函数 $g(t)$ 与 $g'(t)$ 在定义域上的情况下表：

| $t$ | $(-1,3)$ | 3 | $(3,11)$ |
|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | + | 0 | − |
| $g(t)$ | ↗ | 极大值 | ↘ |

（11 分）

所以当 $t=3$ 时，函数 $g(t)$ 取得最大值， （12 分）

所以当 $t=3$ 时，函数 $f(t)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}\sqrt{g(3)}=8$. （13 分）

精华学校

18.已知数列$\{a_n\}$满足：①$a_2>0$；②对于任意正整数$p,q$，都有$a_p\cdot a_q=2^{p+q}$成立.

（Ⅰ）求$a_1$的值；

（Ⅱ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅲ）若$b_n=(a_n+1)^2$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和公式.

【分析】本题主要考察数列的任意性，通过正确的赋值可以构造出熟悉的数列，难度中等偏上。数列在近几年的高考中，在答题中出现在相对靠后的位置，向本题这样难度相对适中的考题出现不多，但必须引起足够的重视。特别想提出，类似本题加入任意性和存在性的数列考察形式更为灵活，相比数列较为陈旧的题型是一种新的趋势，同时也对考生的数学语言的分析能力提出更高要求。同时，第三问中采用的分组求和法也是高考常考的方法，与错位相减法和裂项相消法一样，都需要熟练掌握。

【解】（Ⅰ）由②可得$a_1\cdot a_1=2^2$，$a_1\cdot a_2=2^3$ （2 分）

由①可得$a_1=2$. （3 分）

（Ⅱ）由②可得$a_1\cdot a_n=2^{n+1}$， （6 分）

所以数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2^n$. （7 分）

（Ⅲ）由（Ⅱ）可得$b_n=(a_n+1)^2=4^n+2^{n+1}+1$，

易得$\{4^n\},\{2^{n+1}\}$分别为公比是 4 和 2 的等比数列， （8 分）

由等比数列求和公式可得$S_n=\dfrac{4(1-4^n)}{1-4}+\dfrac{4(1-2^n)}{1-2}+n=\dfrac{1}{3}(4^{n+1}-16)+2^{n+2}+n$.（13 分）

19.已知函数$f(x)=x^2-2(a+1)x+2a\ln x$（$a>0$）.

（Ⅰ）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（Ⅱ）求$f(x)$的单调区间；

（Ⅲ）若$f(x)\le 0$在区间$[1,e]$上恒成立，求实数$a$的取值范围.

【分析】本题是一道典型的利用导数研究函数性质的综合问题，主要涉及到导数与切线、导数与单调区间以及利用最值求解恒成立问题，其中涉及到了不等式的分类讨论，需要对于二次函数性质有深入了解，难度较大。虽然难度不低，但是这类型问题是考生大量训练的题型，是最为基本的函数研究方法，考生入手容易，体面亲切，但是在求解过程中由于思维上的不缜密可能会导致丢分。这类型问题属于高考必考题型之一，在熟悉基础知识的同时加以对应练习，重视分类讨论的基本方式和特征，拿到较高分数并非难事。最后强调，求导的基本运算性质和法则必须熟练掌握，如若不然，此题从第一步产生错误整个题目一分没有而且浪费

精华学校

考场时间。

【解】（Ⅰ）因为 $a=1$， $f(x)=x^2-4x+2\ln x$，

所以 $f'(x)=\dfrac{2x^2-4x+2}{x}(x>0)$， （1 分）

$f(1)=-3$， $f'(1)=0$， （3 分）

所以切线方程为 $y=-3$. （4 分）

（Ⅱ） $f'(x)=\dfrac{2x^2-2(a+1)x+2a}{x}=\dfrac{2(x-1)(x-a)}{x}(x>0)$， （5 分）

由 $f'(x)=0$ 得 $x_1=a,x_2=1$， （6 分）

当 $0<a<1$ 时，在 $x\in(0,a)$ 或 $x\in(1,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，在 $x\in(a,1)$ 时 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(0,a)$ 和 $(1,+\infty)$，单调减区间是 $(a,1)$； （7 分）

当 $a=1$ 时，在 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)\geq 0$，所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(0,+\infty)$； （8 分）

当 $a>1$ 时，在 $x\in(0,1)$ 或 $x\in(a,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，在 $x\in(1,a)$ 时 $f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(0,1)$ 和 $(a,+\infty)$，单调减区间是 $(1,a)$. （10 分）

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知 $f(x)$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上只可能有极小值点，

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上的最大值在区间的端点处取到， （12 分）

即有 $f(1)=1-2(a+1)\leq 0$ 且 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-2(a+1)\mathrm{e}+2a\leq 0$，

解得 $a\geq\dfrac{\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}-2}$. （14 分）

精华学校

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=a$，其中 $a\in N^*$， $a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{3},a_n=3k,k\in N^*\\ a_n+1,a_n\neq 3k,k\in N^*\end{cases}$，令集合

$A=\{x\mid x=a_n,n=1,2,3,\ldots\}$.

（Ⅰ）若 $a_4$ 是数列 $\{a_n\}$ 中首次为1的项，请写出所有满足该条件的数列的前三项；

（Ⅱ）求证：$\{1,2,3\}\subseteq A$；

（Ⅲ）当 $a\leq 2014$ 时，求集合 $A$ 中元素个数 $Card(A)$ 的最大值.

【分析】本题依旧延续北京命题风格，是一道以数列为背景的组合问题，入手不难，淡化了繁杂的数学技巧，强调对于数学概念本质的理解和逻辑推理能力的培养，体现出了新课改的核心内容，难度较大。本题首先需要考生具有数学语言的阅读能力，通过数学符号语言表示的题面来理解整个题目的本质，如果读懂题目，第一问的求解并非难事，希望考生不要盲目放弃最后一题。本题涉及到了部分初等数论中无穷递降的思想，这里也想对能力相对较好，有望冲击 145 分的考生强调，可以涉猎一些基本的初等数论问题（整除与同余部分，推荐学生阅读选修 4-6）和组合数学问题，有助于培养类似压轴题这种问题的解题思路。本文编者利用组合数学常见的划分方法给出了更容易理解的一个解法。这类型解法更符合组合极值问题求解法的一般性，相比原答案中的递推说明更容易理解，更方便掌握。

【解】（Ⅰ）根据$a_4=1$和递推公式可知，$a_3=3$，进一步分析可知，$a_2$可以等于9或2，同理对于$a_2=9$和$a_2=2$两种情况进行分析，可以得到答案：$\{27,9,3\}$，$\{8,9,3\}$，$\{6,2,3\}$.（3分）

（Ⅱ）解法一：若$a_k$被3除余1，则由已知可得$a_{k+1}=a_k+1, a_{k+2}=a_k+2, a_{k+3}=\frac{1}{3}(a_k+2)$；

若$a_k$被3除余2，则由已知可得$a_{k+1}=a_k+1, a_{k+2}=\frac{1}{3}(a_k+1)$，$a_{k+3}\le\frac{1}{3}(a_k+1)+1$；

若$a_k$被3除余0，则由已知可得$a_{k+1}=\frac{1}{3}a_k$，$a_{k+3}\le\frac{1}{3}a_k+2$；

所以$a_{k+3}\le\frac{1}{3}a_k+2$，

所以$a_k-a_{k+3}\ge a_k-(\frac{1}{3}a_k+2)=\frac{2}{3}(a_k-3)$

所以，对于数列$\{a_n\}$中的任意一项$a_k$，“若$a_k>3$，则$a_k>a_{k+3}$”.

因为$a_k\in\mathbf{N}^*$，所以$a_k-a_{k+3}\ge1$.

所以数列$\{a_n\}$中必存在某一项$a_m\le3$（否则会与上述结论矛盾）

若 $a_m=3$，则 $a_{m+1}=1, a_{m+2}=2$；若 $a_m=2$，则 $a_{m+1}=3, a_{m+2}=1$，若 $a_m=1$，则 $a_{m+1}=2, a_{m+2}=3$，

由递推关系易得$\{1,2,3\}\subseteq A$.（8分）

解法二：若$a=1$，则$1\in A$，若$a=2$，则$2+1=3\in A$，所以$\frac{3}{3}=1\in A$。

若$a\in[3^k,3^{k+1}](k\ge1,k\in N)$，设$a=3^k+m(0\le m\le2\cdot3^k)$

若$m$被3整除，则$\frac{a}{3}\in[3^{k-1},3^k]$

若$m$被3除余1，则$a+1\in[3^k,3^{k+1}]$、$a+2\in[3^k,3^{k+1}]$，$\frac{a+2}{3}\in[3^{k-1},3^k]$

若$m$被3除余2，则$a+1\in[3^k,3^{k+1}]$，$\frac{a+1}{3}\in[3^{k-1},3^k]$

由以上可知：最多经过3次操作，就能把$a$变为区间$[3^{k-1},3^k]$内的唯一确定的一个数。又因为$a$为常数，故$k$为某个确定的常数，因此经过有限次的变换，必然能把$a$变为区间

$[1,3]$ 内的某一个数 $f(a)$。

若 $f(a)=1$，则 $1\in A$，$2\in A$，$3\in A$

若 $f(a)=2$，则 $3\in A$，$1\in A$

若 $f(a)=3$，则 $1\in A$，$2\in A$

总之，$\{1,2,3\}\subseteq A$。（8 分）

（Ⅲ）集合 $A$ 中元素个数 $Card(A)$ 的最大值为 21.

解法一：由已知递推关系可推得数列 $\{a_n\}$ 满足：

当 $a_m\in\{1,2,3\}$ 时，总有 $a_n=a_{n+3}$ 成立，其中 $n=m,m+1,m+2,\cdots$.

下面考虑当 $a_1=a\le 2014$ 时，数列 $\{a_n\}$ 中大于 3 的各项：

按逆序排列各项，构成的数列记为 $\{b_n\}$，由（Ⅰ）可得 $b_1=6$ 或 9,

由（Ⅱ）的证明过程可知数列 $\{b_n\}$ 的项满足：

$b_{n+3}>b_n$，且当 $b_n$ 是 3 的倍数时，若使 $b_{n+3}-b_n$ 最小，需使 $b_{n+2}=b_{n+1}-1=b_n-2$，

所以，满足 $b_{n+3}-b_n$ 最小的数列 $\{b_n\}$ 中，$b_3=4$ 或 7，且 $b_{3k}=3b_{3k+3}-2$，

所以 $b_{3k}-1=3(b_{3(k+1)}-1)$，所以数列 $\{b_{3k}-1\}$ 是首项为 $4-1$ 或 $7-1$ 的公比为 3 的等比数列，

所以 $b_{3k}-1=(4-1)\times 3^{k-1}$ 或 $b_{3k}-1=(7-1)\times 3^{k-1}$，即 $b_{3k}=3^k+1$ 或 $b_{3k}=2\times 3^k+1$，

因为 $3^6<2014<3^7$，所以，当 $a\le 2014$ 时，$k$ 的最大值是 6,

所以 $a_1=b_{18}$，所以集合 $A$ 重元素个数 $Card(A)$ 的最大值为 21.（13 分）

解法二：若 $a\in[3^k,3^{k+1}](k\ge 1,k\in N)$，因为最多经过 3 次操作，就能把 $a$ 变为区间 $[3^{k-1},3^k]$ 内的唯一确定的一个数，所以每个区间 $[3^k,3^{k+1}](k\in N)$ 内的 $a_i(i=1,2,3,\cdots)$ 最多不超过 3 个。

又因为 $3^6<2014<3^7$，所以 $A$ 中的所有元素分布在如下的七个区间内：$[3^0,3^1]$，$[3^1,3^2]$，$\cdots,[3^6,3^7]$，故 $card(A)\le 21$。下面给出一个 $card(A)=21$ 的集合 $A$：

$\{3^6+1,3^6+2,3^6+3,3^5+1,3^5+2,3^5+3,3^4+1,3^4+2,3^4+3,3^3+1,3^3+2,3^3+3,3^2+1,3^2+2,3^2+3,$

$3+1,3+2,3+3,1+1,1+2,1\}$

## 【结语】

纵观整张试卷从题型、难度、基本考点与往年的高三上学期期中考试基本一致，考生们的第一感觉都较为熟悉亲切。这次考试依旧全面考察的基础知识，基本数学能力，题目难度属于中等，没有怪题难题，强调对于逻辑思维和数学能力的考察，符合北京高考的命题特点，具有一定的参考价值。希望考生们在后续的复习中，注重数学的基础知识和解决基本问题的能力，注重数学学科内的联系与综合。同时，本次期中考试作为区内的第一次统考，对于考生自身的定位也有一定的帮助，希望考生及时发现现阶段复习中存在的问题，及时予以改正。

## 【期中后复习建议】

1.用好期中试题，重视试题背后的东西，根据试题查漏补缺。

2.从题海中适当解放出来。放慢节奏，多总结、多重复。这是 2014 年及以后高考命题的方向。

3.对所复习的每部分内容要非常重视对有关概念的内涵、外延的理解和应用，同时注重对“3521”的体会和应用。“3”指：数形结合的思想、分类讨论的思想、函数的思想；“5”指：极端原理、运动变化的观点、归纳猜想、构造、从反面考虑问题等；“2”指：归纳推理、演绎推理；“1”指：数学的直观感知及分析问题解决问题的能力。

另外，希望不同层次的考生有不同的、适合自己的一轮复习策略：

（1）基础不太好的同学，应脱离题海，用心狠抓对重要概念的学习和正确理解，狠抓基础知识的落实和基本方法的规范应用，很抓高考高频考点的落实。

（2）基础中等或中等偏上的同学，应脱离题海，狠抓重要概念、重要的思维方法、落实高频考点，特别是在暴露出来的漏洞上多下工夫，找到源头上的原因，从新的起点重新复习。

（3）基础好的同学，除以上内容外，应在第 8、14、20 题的复习上加强思维能力的提高，并争取做出第 20 题，冲击 140 分以上。通过精华学校历年来对人大附中等学校尖子生的培养证明，第 20 题是有规律的，是可以通过复习达到解题目的的。

**最后，希望考生积极备考，注意身体健康，考出理想的成绩！**

精华学校